外心

數學所碩二黃名鉞

一、等距問題

平面幾何在生活中到底有什麼用？某電視名人在布置家裡的時候第一次體會到數學的威力。當時她家裡的牆上有著一個圓形的區域，而這位名人希望在這個圓的圓心上釘一根釘子以吊掛東西，但這個任務卻難倒她了，因為她不知道該如何找到圓心的位置。當她在電台節目說出這個難題時，觀眾的明信片就開始如雪花般飛來，而這位名人也才發現，原來解決這個問題的方法竟有非常多種，也發現數學在這些方法中佔有著舉足輕重的角色。各位同學可以想一想，如果你是這位名人，你會用什麼方法來解決這個難題呢？你是否又能用數學來說明為何你的方法是可行的呢？

在我們用嚴謹的數學回答這個問題之前，我們可以先試圖地將這個問題用數學的語言來描述。也就是說，給定平面上的一個圓，我們希望可以找出它的圓心在哪裡。當然，想要把目標揪出來就必須要先了解目標的特性。我們知道圓心最主要的性質就是它到圓上任何一個點的距離都相等，所以我們的目的就變成是要在這個平面上，找一個與圓上任一點都等距的點。但是圓上的點有無窮多個，所以我們先想想比較簡單的狀況。考慮此圓上兩個相異的點 A 和 B，那麼在這個平面上與 A 和 B 兩點距離都相等的點會落在哪裡呢？過去我們曾學過，中垂線上的每一個點到兩端點的距離都相等，事實上我們可以證明

***Theorem* 1.** 給定平面上一線段 $\overline{AB}$ 以及一點 P，

1. 若 P 落在線段 $\overline{AB}$ 的中垂線上，則 $\overline{PA}=\overline{PB}$。
2. 若 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則 P 落在線段 $\overline{AB}$ 的中垂線上。

也就是說，我們的圓心候選人從一整個平面上的點減少到只剩 $\overline{AB}$ 中垂線 L_{AB} 上的點。可是這樣我們還是無法決定到底哪個才是圓心，所以我們就再考慮圓上的第三個相異點 C，並如法炮製地做出 $\overline{AC}$ 的中垂線 L_{AC}。根據前面的論述，圓心勢必要同時落在 L_{AB} 和 L_{AC} 上，但這兩條直線一定會有交點嗎？答案是肯定的，因為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 絕對不會平行 (為什麼？)，所以他們的中垂線也絕對不會平行，既然不平行就必然要交於一點，而這唯一的候選人就是我們要的圓心了。

***Exercise* 1.** 平面上有不共線三點 A,B,C 分別代表三戶人家，現在他們想要挖一個井，但為了公平起見，這個井跟三戶人家的距離必須要相等。試用尺規作圖找出這個井的位置。

二、外心與外接圓

由上面的例題我們可以發現，在平面上給定不共線的相異三個點，必可找到「唯一」的一點到這三點都等距。這個現象其實還有很多種說法，如果我們用這個點當圓心，以圓心到三點中任一點的距離當半徑，就可以畫出一個同時通過此三點的圓。一般常見的數學說法是

***Theorem* 2.** 在平面上，不共線的相異三點唯一決定一個圓。

從另一個觀點來看，平面上給定不共線的相異三個點，基本上跟給定一個三角形是一樣的。所以上面的敘述就變成了

***Theorem* 3.** 在平面上，給定任一個三角形，必可找到唯一的一個點到三頂點都等距。我們將這個點稱為此三角形的「外心」。若以外心為圓心，外心到任一頂點的距離為半徑畫一圓，就可得到這個三角形的「外接圓」。同樣地，因為外心是唯一的，所以外接圓也是唯一的。

上面這種命名方式往往會讓人產生誤會，較合理的說法應該是我們先找到了外接圓，再把外接圓的圓心命名為外心。事實上，外心並不一定都在三角形的外部。(但三角形的另一顆心—內心一定在三角形的內部！)

***Theorem* 4.** 銳角三角形的外心恆在三角形內部，鈍角三角形的外心恆在三角形外部，而直角三角形的外心恰為其斜邊中點。

其中值得注意的是，直角三角形的情況剛好是 Thales 定理的逆定理，也就是說任何一個直角三角形必內接於一個以其斜邊為直徑的半圓。

三、從平面到空間

接下來，我們想把上面的問題放到空間中來討論。第一個推廣的問題就是給定空間中的一個球面，有沒有什麼方法可以找出它的球心呢？同樣地我們仿照之前的分析方法，首先考慮球上兩點 A 和 B，那麼在「空間中」與這兩點都等距的點會落在哪呢？基本上還是會落在中垂線上。但我們應該特別注意的是，在空間中 $\overline{AB}$ 的中垂線不再只有一條了，而這無窮多條中垂線會形成一個「中垂面」 E_{AB}。當然，這樣的候選人還是太多了 (一整個平面的點)，所以我們再考慮球上第三個相異點 C，並做出 $\overline{AC}$ 的中垂面 E_{AC}。自然地，我們的球心應該要同時落在這兩個平面上，唯一和平面世界的版本不同的是，這兩個不平行 (為什麼？) 的平面會相交於一條直線 L_{ABC}，所以我們的候選人還是有無窮多個，而我們也只好再找球上的第四個相異點 D，並做出 $\overline{AD}$ 的中垂面 E_{AD}。大部分人可能會覺得 E_{AD} 與 L_{ABC} 的交點就是我們最後的答案了，不過很不幸的是 L_{ABC} 是有可能完全落在 E_{AD} 上的。在找出讓 E_{AD} 和 L_{ABC} 交於唯一一點的條件之前，我們可以先觀察一下 L_{ABC} 的性質。

***Theorem* 5.** L_{ABC} 是一條通過 $\triangle ABC$ 的外心、且垂直平面 ABC 的直線。

換句話說， L_{ABC} 其實是平面 ABC 的一條法線。另外，如果我們希望 E_{AD} 不包含 L_{ABC} 的話，那麼 E_{AD} 的法線們就絕對不可以和 L_{ABC} 垂直。特別注意到的是， $\overline{AD}$ 是 E_{AD} 的一條法線，而且 A 又落在平面 ABC 上，若是 $\overline{AD}$ 完全落在平面 ABC 上，那麼 $\overline{AD}$ 和 L_{ABC} 就垂直了！所以我們發現，要讓 E_{AD} 和 L_{ABC} 交於一點的話， D 就絕對不能落在平面 ABC 上。也就是說，只要 A, B, C, D 四點不共平面，那麼 E_{AB}, E_{AC}, E_{AD} 這三個中垂面就會交於唯一的一個點，而球心也就找到了。

跟平面上的版本一樣，我們也把這個找球心的方法和結果用各種不同的數學角度來描述。

***Theorem* 6.** 在空間中，不共平面的四個相異點唯一決定一個球面。

***Theorem* 7.** 空間中給定一個四面體，必可找到唯一一個點到四個頂點等距，同時也可找到唯一的一個外接球面。