指數

數學所碩二黃名鉞

一、惡魔的骰子：放射性衰變

自然界裡有很多元素是會衰變成其他元素的，雖然在目前的物理理論裡認為這種衰變是隨機的，但是每種放射性物質的衰變機率卻是固定的，而且是跟衰變時的質量成正比。從巨觀的角度來看，我們可以發現放射性物質的質量衰變到原來的一半時所花的時間大致上是固定的，並進一步地將這個時間稱為「半衰期」。舉個簡單的例子，^{14}C 是碳的同位素之一但是具有放射性，其半衰期約為 5730 年，也就是說每經過 5730 年，物質內的 ^{14}C 質量就會減為原來的一半。不過生物體因為有呼吸作用，所以體內的 ^{14}C 可以不斷地由大氣補充並達到一穩定濃度，只有在生物體死亡後體內的 ^{14}C 含量才會開始下降。考古學家就是利用比較大氣與化石中的 ^{14}C 濃度來測定化石的年代。

***Exercise* 1.** 假設大氣中 ^{14}C 的濃度為 10ppm，試問一棵針葉樹死亡 5730 年、11460 年、17190 年後所含的 ^{14}C 濃度分別為多少?

***Exercise* 2.** 假設大氣中 ^{14}C 的濃度為 10ppm，而今天發現一棵針葉樹的殘骸中含有 0.625ppm 的 ^{14}C，試求其死亡的年代。

從上面的練習中可以發現，我們可以將 ^{14}C 的質量或濃度寫成時間的函數。以上面的練習為例，t 年後的 ^{14}C 濃度可以寫成 $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$ppm。那麼如果經過了 10 年之後，^{14}C 的濃度似乎應該要是 $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1/573}$ppm，但是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/573}$ 到底是個什麼樣的數呢?

另外我們還可以發現，只要相隔的時間是固定的，那麼質量衰變的比例就是固定的。舉例來說，只要經過的時間是 11460 年，^{14}C 的濃度就會不斷地降為原來的 $\frac{1}{4}$。換句話說，當我們固定時間的間隔時，^{14}C 的濃度就會形成一個等比數列。事實上，這就是指數衰變的最大特色，即使該時間間隔不是整數也是對的。所以剛才的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/573}$ 可以解釋成當時間間隔是 10 年時，^{14}C 的濃度衰變比例，而這個數必須滿足過了 573 個 10 年之後要剛好衰變成一半，也就是說 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/573}\right]^{573} = \frac{1}{2}$。這種關係我們在數學上就稱為指數律。

二、指數律

讓我們來回想一下以前所學過的指數定義。假設 m 是一個正整數，則 m 個 a 相乘就可表示為

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個}} = a^m$$

用這種想法，我們可以很容易地推導出

1.

$$a^{m+n} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n\text{ 個}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^m \times a^n$$

2.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n\text{ 個}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{ 個}}} = a^{mn}$$

3.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n\text{ 個}} = \underbrace{ab \times ab \times \cdots \times ab}_{n\text{ 個}} = (ab)^n$$

接下來我們想把 m 的條件放鬆一些，讓它可以是整數、有理數、甚至是任意實數。但在這推廣的過程當中，我們希望指數律依然要成立。事實上，我們正是利用指數律來定義所謂的廣義指數。

(1) 零指數

從正整數推廣到一般的整數時必須先定義零指數，因為負數基本上是視為正數的加法反元素，也就是說 $-a$ 必須要滿足 $a+(-a)=0$。那麼我們該怎麼定義 a^0 呢? 值得注意的是，0 的最大特色就是任何實數和 0 相加都還是自己，所以為了滿足指數律，我們可以發現 a^0 必須要滿足

$$a^n = a^{n+0} = a^n \times a^0$$

如果 $a \neq 0$，則 $a^n \neq 0$，所以可以兩邊同除 a^n 並得到 $a^0 = 1$。至於這樣的定義是否也會滿足另外兩個指數律，就留給同學當作練習。

***Exercise* 3.** 假設 $a, b \neq 0$ 且 n 是任意正整數，試證明 $(a^n)^0 = a^{(n\times 0)}$，$(a^0)^n = a^{(0\times n)}$，$(a^0)^0 = a^{(0\times 0)}$ 以及 $a^0 \times b^0 = (ab)^0$。

在這裡要特別注意 0^0 是沒有定義的，因為從上面的式子中可以發現如果 $a=0$，則 a^0 定義成任何數都不會違反指數律。換句話說，0^0 是任何數字都不奇怪，這在以後的微積分裡會有更詳細的討論。

(2) 負整數指數

有了 a^0 之後，我們就可以很自然地定義出 a^{-n}。同樣為了要滿足指數律，當 $a \neq 0$ 時，我們會有

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

也就是說 a^{-n} 必須是 a^n 的倒數，或者是記成 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$。同樣地，檢查這樣的定義是否會滿足另外兩個指數律就留做習題。

(3) 分數指數

最後，我們想要定義 $a^{\frac{1}{n}}$。從前面的練習可以發現，$a^{\frac{1}{n}}$ 必須要滿足

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

也就是說 $a^{\frac{1}{n}}$ 必須是 a 的某個 n 次方根。但是這時問題就來了，因為當 $a<0$ 的時候，$x^n=a$ 不一定會有實數解。只有在 $a>0$ 的時候，這個方程式才會有一個唯一的正實根 (勘根定理)。所以為了避免要討論的麻煩，我們在考慮分數指數時都要求 $a>0$，並且定義 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，是方程式 $x^n=a$ 的正實根。

三、實數的完備性與指數函數

當我們想把指數推廣到一般的實數會遇到一些問題，那就是一般的實數並沒有特殊的運算性質，而我們對實數的想像也只是實數線上的線段長而已。所以在這裡我們要換個角度看實數，也就是用我們以前所熟悉的有理數來看它。大家可以回想一下，當初我們建構 $\sqrt{2}$ 時是為了要找出某個線段長，使其平方值為 2。如果我們把 $y=x^2$ 的函數圖形畫在坐標平面上，再畫一條 $y=2$ 的水平線，那麼我們可以看出其交點到 y 軸的距離應該就是我們要的長度。但是我們也可以換個角度看，因為我們現在能理解的只有有理數，所以我們就找一連串的小數使得他們的平方小於 2 但是不要超過 2，這時我們就會發現這些小數會不斷地靠近我們想要的長度。

x	1.4	1.41	1.414	1.4142
x^2	1.96	1.9881	1.999396	1.9996164

實數完備性其實就是把這個現象當成公設，也就是說任何一個遞增有上界的數列都會收斂到一個實數。在上面的例子裡，$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$ 就會收斂到我們想要的 $\sqrt{2}$.

同樣地，當我們考慮 $2^{\sqrt{2}}$ 時，事實上是先考慮一個遞增有上界的數列

$$2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \cdots$$

然後再把這個數列的極限值定義成 $2^{\sqrt{2}}$。而且我們可以進一步證明，這樣子定義出來的實數指數依然會滿足指數律，但是證明需要用到一些極限的性質，所以在此就不多加討論了。

四、參考資料

1. 毛起來說 e。Eli Maor 著。