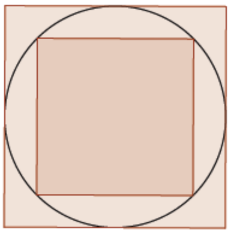
有限與無窮

數學所碩二黃名鉞

一、動態窮盡法

過去我們所學的數學大致上可以分成幾何與代數兩個部分。若由歷史的角度來看，幾何的發展是來自於測量，而代數則是將測量中使用到的數及運算做抽象化的延伸。由此可以看出，數學基本上是為了要解決生活中實際遇到的問題所發展出來的學問。而在測量的問題當中，最有趣、也最重要的莫過於求面積了。我們已經學過矩形的面積為長跟寬的長度相乘，平行四邊形可藉由適當的分割化成矩形以求出面積，至於三角形面積則可看成是一個平行四邊形面積的一半。自此，我們就可以將任意的多邊形分割成數個三角形以求出其面積。但是當我們考慮的形狀並非由直線所構成，譬如說求圓的面積的時候，事情就變得複雜許多。歷史上最早處理這個問題的方法可追溯至公元前三世紀的窮盡法，其代表人物自然就是 Archimedes。這個方法其實很單純，基本上就是拿一堆多邊形去估計圓的面積，譬如說我們可以在圓內跟圓外分別畫出一個內接正方型和外切正方形



假設圓半徑是 1，則此圓的面積 A 必須介於兩個正方形的面積之間，也就是說

$$2 < A < 4$$

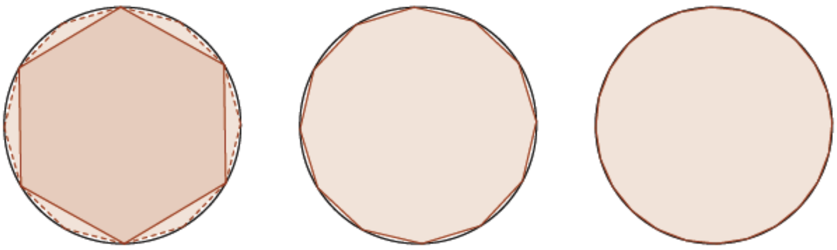
但是從圖形上也可以看出來，這樣的估計似乎是有點太粗糙了。所以 Archimedes 就把正方形改成正六邊形並得到了

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < A < 2\sqrt{3}$$

不過當時的數學家還沒有平方根的符號，所以 Archimedes 其實是用近似的有理數來表示他的估計式的。而現在我們可以利用直式開方法或是借助計算機的幫助得到

$$2.59817621 < A < 3.46410162$$

看起來我們的誤差已經從一開始的 2 減少到 0.9 左右了，但是 Archimedes 認為這樣還不夠，於是便開始將內接與外切的兩個正多邊形的邊數加倍



假設 S_n 與 A_n 分別代表內接正 $6 \times 2^{n-1}$ 邊形的邊長與面積， T_n 與 B_n 分別代表外切正 $6 \times 2^{n-1}$ 邊形的邊長與面積，則利用一些相似三角形的性質我們可以得到

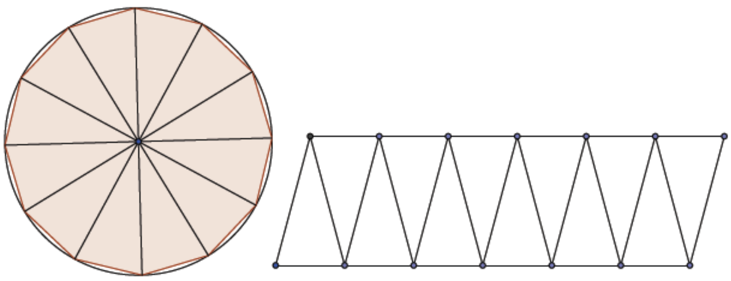
$$S_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}} \qquad \text{and} \qquad A_{n+1} = 3 \times 2^{n-1} S_{n+1} \sqrt{1 - \frac{S_{n+1}^2}{4}}$$

$$T_{n+1} = \frac{\sqrt{16 + 4T_n^2} - 4}{T_n} \qquad \text{and} \qquad B_{n+1} = 3 \times 2^{n-1} T_{n+1}$$

Archimedes 利用上面的關係做到 $n=5$，也就是用正 96 邊形去逼近圓面積，便得到了 A 的近似值為 3.14 且誤差小於 0.01。在此，我們利用計算機算到 $n=10$ 的情況如下

	S_n	A_n	$6\times 2^{n-1}\times S_n$	T_n	B_n	$6\times 2^{n-1}\times T_n$
$n=1$	1	2.59807	6	1.15470	3.46410	6.92820
$n=2$	0.51763	3	6.21165	0.53589	3.21539	6.40378
$n=3$	0.26105	3.10582	6.26525	0.26330	3.15965	6.31932
$n=4$	0.13080	3.13262	6.27870	0.13108	3.14608	6.29217
$n=5$	0.06543	3.13935	6.28206	0.06547	3.14271	6.28542
$n=6$	0.03272	3.14103	6.28290	0.03272	3.14187	6.28374
$n=7$	0.01636	3.14145	6.28311	0.01636	3.14166	6.28332
$n=8$	0.00818	3.14155	6.28316	0.00818	3.14161	6.28322
$n=9$	0.00409	3.14158	6.28318	0.00409	3.14159	6.28319
$n=10$	0.00204	3.14159	6.28318	0.00204	3.14159	6.28318

其中除了面積的估計之外，我們還多算了圓周長 2π 的估計值，並且發現圓面積的估計值會慢慢地靠近圓周長估計值的一半。換句話說，單位圓的面積似乎就是 π。這其實可以從圖形中看出來，若把用來近似的正多邊形分割成數個全等的等腰三角形，並重新排成平行四邊形的樣子，當正多邊形的邊數很大時，此平行四邊形的底會很接近圓周長的一半，而高則會接近圓的半徑 1，所以面積就會接近 π。



這種方法的概念有點像是把圓形想像成一個不斷在變動的正多邊形，每過一段時間此正多邊形的邊數就變成原來的兩倍，而面積和周長也變得更接近圓面積和圓周長。換句話說，我們考慮的問題其實不是靜止的，但我們只能看到每個靜止的切片，就像電影的放映過程一樣。我們現在的問題是，圖形上告訴我們，只要用來近似的正多邊形邊數夠多 (時間夠長)，我們就可以讓誤差要多小就有多小；但是不管 n 多大 (時間過了多久)，近似值就是近似值，永遠不會跟圓面積或圓周長一樣大，也就是說這部電影底片的每一個影格呈現的都是一個內接正多邊形，但是當電影放映了很久很久之後，這些內接正多邊形會幾乎蓋滿 (窮盡) 整個圓，所以我們就幾乎分不出來這個內接正多邊形和圓形的差異。但是古希臘的數學家對於「很久很久」的概念感到非常的不安，甚至到最後是避之唯恐不及。一直要到十八世紀，數學家才給了這種無窮過程一個正式的定義，並進一步發展出數學的一門新領域—分析學。

二、離散還是連續?

上面討論的這種無窮過程其實以各種不同的形式存在於我們的生活中。在古希臘時代，人們對時空的看法有兩種，一種是時間與空間可以一再分割下去，永遠沒有止境，「因此」運動是連續的。另一種是時間和空間都有最小的、不可分割的組成單位，「因此」運動是電影式的。對於數學家而言，這樣的問題相當於實數線是否有最小的組成單位? 畢式學派主張數學原子論，認為點是幾何的「原子」，其長度 $d>0$，因而任何兩線段皆可共度，並由此證明了長方形的面積公式、畢氏定理與相似三角形基本定理。不幸的是，畢氏的門徒 Hippasus 發現了不可共度線段，震垮了畢氏學派的幾何學。之後 Euclid 重新發展出來的歐式幾何就改採「連續」的世界觀，主張直線與平面都是「連續」的，可作無窮步驟的分割，最後得到的是「點」。他對幾何元素的定義就是

1. 點是沒有部分的。(A point is that which has no part.)

2. 線段只有長度而沒有寬度。(A line is breadthless length.)

3. 線段是由點組成的。(The extremities of a line are points.)

但是連續的系統其實並不自然。戰國名家公孫龍有言：一尺之棰，日取其半，萬世不竭，可是這樣的現象在實際的生活中是不可能看到的。因此，希臘哲學家 Zeno 提出了四個關於連續與離散的弔詭問題，其中第一個弔詭就是在連續系統裡移動是不可能的，因為你若要到達目的地就必須要先到達全程 1/2 的位置，但到了 1/2 位置之後又要先走到 3/4 位置才能再往終點前進，就這樣重複無窮多步下去，而且每一步所花的時間都是正的 (因為在連續系統裡時間可以被無窮地分割，即便分割到最後會變成無窮小)，所以我們就永遠走不到目的地。

另一個關於無窮小的弔詭是發生在我們前面討論的例子。當我們的正多邊形邊數增加的時候，每個邊的邊長會不斷地靠近 0，但是當邊長乘上邊數的時候卻會逼近圓周長，也就是說無窮多個無窮小 (但不是 0) 的數字加起來竟然是有限的! 這看起來違反直覺的敘述卻真實地呈現在簡單的幾何圖形上。所以如果我們要接受實數線是連續的，就必須要釐清這系統裡面的無窮大和無窮小到底是什麼才行。

三、無窮數列與級數

過去我們已經學習過簡單的數列概念，也觀察過許多數列的規則，但是以前我們所關心的數列都只有有限項，而現在我們想要觀察的是一個無窮無盡的數列。也就是說，給定任何一個自然數 n，我們就可以算出一個內接正 $6 \times 2^{n-1}$ 邊形的面積 A_n，不管 n 多大，只要我們從 A_1 開始，一項一項地依次算出 $A_2, A_3, \cdots$，就一定可以算出 A_n。上面的討論告訴我們， A_n 和圓面積 A 之間的誤差可以任意地小 (但不必是 0)，只要 n 足夠大。這個時候我們就說當 n 趨近於無窮大時， A_n 會收斂到 A。

***Definition* 1.** 設 $L \in \mathbb{R}$，若對任意 (小) 的正實數 ϵ，我們可以找到足夠大的 N 使得無窮實數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在第 N 項之後與 L 的差距都小於 ϵ，則我們說此數列收斂到 L。

大家可以注意到的是，上述定義當中的任意 $\epsilon > 0$ 其實就是一直困擾我們的無窮小，而那個足夠大的 N 就是古希臘人難以接受的「很久很久」。換句話說，所謂的無窮小並不是一個數，而是一個動態過程的結果，它必須要伴隨的代價就是 n 要足夠大，只要我們能夠付出足夠的代價讓 a_n 和 L 的差距任意地小，我們就說 a_n 收斂到 L。

***Exercise* 1.** 考慮無窮數列 $a_n = 1$，試判斷此數列是否收斂到 0? 是否收斂到 1? 是否收斂到 2?

***Exercise* 2.** 考慮無窮數列 $a_n = \dfrac{1}{n}$，試判斷此數列是否收斂到 0? 是否收斂到 1? 是否收斂到 2?

***Exercise* 3.** 考慮無窮數列 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$，試判斷此數列是否收斂到 0? 是否收斂到 1? 是否收斂到 2?

***Exercise* 4.** 考慮無窮數列 $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，試判斷此數列是否收斂到 0? 是否收斂到 1? 是否收斂到 2?

***Exercise* 5.** 考慮無窮數列 $a_n = n$，試判斷此數列是否收斂到 0? 是否收斂到 1? 是否收斂到 2? 是否有一個實數 L 使得 $a_n = n$ 收斂到 L?

***Exercise* 6.** 考慮無窮數列 $a_n = (-1)^n$，試判斷此數列是否收斂到 1? 是否收斂到 -1? 是否收斂到 0? 是否有一個實數 L 使得 $a_n = n$ 收斂到 L?

當我們理解了收斂到某個實數 L 的概念之後，很自然地會接著問：一個無窮實數數列什麼時候會收斂? 首先，我們先給一個稍為廣義一點的定義

***Definition* 2.** 若存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得 a_n 收斂到 L，則稱無窮實數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂，或說 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。反之，若對任意 $L \in \mathbb{R}$， a_n 都不收斂到 L，則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散，或記做 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在。

上述定義中的 lim 就是所謂的極限符號，但要特別注意的是，在寫出這個符號之前一定要先判斷無窮數列是否收斂，只有在收斂的情況下 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 才有意義 (事實上就是某個實數)。從前面的例題中我們可以發現，有一些簡單的數列是很容易判斷收斂或發散的，再輔以一些收斂數列的性質，我們就可以處理看起來比較複雜的數列了。

***Theorem* 1.** 1. 對任意實數 c，$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$。

2. 若 $p > 0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$。若 $p = 0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1$。若 $p < 0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 不存在。
3. 若 $|r| < 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。若 $r = 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$。若 $r = -1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ 不存在。若 $|r| > 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ 不存在。

***Theorem* 2.** 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是兩個無窮實數數列，且 a_n 收斂到 a、 b_n 收斂到 b，則

1. 無窮數列 $c_n = a_n + b_n$ 也收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$。
2. 無窮數列 $c_n = a_n \times b_n$ 也收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \times b_n) = ab$。
3. 若 $a \neq 0$，則無窮數列 $c_n = \dfrac{1}{a_n}$ 也收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$。

***Theorem* 3** (Squeezing theorem)**.** 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是三個無窮實數數列，若 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 a_n 和 c_n 都收斂到 L，則 b_n 也收斂到 L。

***Exercise* 7.** 試判斷無窮數列 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 是否收斂? 若收斂，則計算其極限值。

***Exercise* 8.** 試判斷無窮數列 $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$ 是否收斂? 若收斂，則計算其極限值。

既然我們把以前所學的有限項數列推廣到了無窮數列，那麼有限級數是不是也能推廣到無窮極數呢? 其實只要把無窮級數看成是前 n 項部分和所形成的數列，那麼利用無窮數列收斂的概念我們就可以來討論無窮級數是否收斂或發散。

***Definition* 3.** 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮實數數列，考慮一個新無窮數列 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，若 s_n 收斂到 L，則稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L$。反之，若 s_n 發散，則稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

***Exercise* 9.** 試判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 是否收斂。

***Exercise* 10.** 試判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 是否收斂。

把上面的例子稍加推廣，我們就得到了無窮等比級數的公式

***Theorem* 4.** 若 $|r| < 1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ 收斂，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \dfrac{a_1}{1-r}$。若 $|r| \geq 1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ 發散。

***Exercise* 11.** 試判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^n}$ 是否收斂。

***Exercise* 12.** 試判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 是否收斂。

有了無窮級數收斂的概念之後，「把無窮多個無窮小的數加起來」就有了明確的數學意義，同時我們也可以利用這種概念來解決 Zeno 的第一個詭論。假設某個人從實數線上的原點出發且速度是 1 單位/秒 (往實數線的正向移動)，過去的數學告訴我們他應該在 1 秒後就會抵達坐標是 1 的位置。從 Zeno 的角度來看，當時間過了 1/2 秒時，此人走了 1/2 的路程；當時間過了 $1/2 + 1/4 = 3/4$ 秒的時候，此人走了 $1/2 + 1/4 = 3/4$ 的路程，也就是說此人所走的路程是一個無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$。雖然這個無窮級數收斂到 1，但是不管我們加了多少 (有限) 項，前 n 項的有限和就是不會等於 1。不過我們忽略了一件事情，那就是此人在這無窮過程當中所花的時間也

是同一個無窮級數，既然這個無窮級數的和收斂到 1，那麼此人所花費的總時間當然也是有限的，所以沒有任何矛盾產生。

這個弔詭中最大的問題其實是在於我們沒有區分清楚 n 和時間的不同，事實上我們可以把 n 想成是一台相機拍攝此人行走狀態的次數，也就是說我們看到的路程 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ 就是這台相機在時間 $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ 秒時所拍攝的一張照片。當我們假設時間是連續、可以被無窮分割的時候，基本上就是在假設這台相機的拍攝速度可以無窮快，但不幸的是，到目前為止還沒有任何的工程師可以製造出這樣的相機來。所以我們只在邏輯上定義所謂的分割無窮多次 (或是說公理化)，即便現實生活中能辦到的都只能是有限步驟。

四、實數的完備性

最後，我們想利用這些極限的概念，回過頭去重新檢視實數的意義。過去，我們對正實數的理解就是線段長 (幾何概念)，後來畢氏學派試圖地將數與直線做連結，並發展出了現在常用的實數線 (代數概念)。不幸的是， $\sqrt{2}$ 這個無理數的出現讓畢氏學派面臨了莫大的窘境。但現在我們有了連續性的假設 (分析概念)，所以我們可以更仔細地審視無理數與有理數之間的關係。

大家應該還記得 $\sqrt{2}$ 是一個面積為 2 的正方形邊長，如果我們將這個正方形的左下角頂點放在坐標平面上的原點，並讓整個正方形都落在第一象限，那麼右下角頂點的坐標就是 $(\sqrt{2}, 0)$。因為我們現在能理解的只有有理數，所以我們就先在 x 軸上找一個整數 x_1 盡可能地靠近 $\sqrt{2}$，也就是正方型面積要盡可能地接近 2。經過簡單的計算可以發現 $x_1 = 1$。但是這樣做出來的正方型面積和 2 差得有點多，所以我們就再找一個小數點後只有一位的有理數 x_2 使得以 x_2 為邊長的正方型面積要盡可能地接近 2。同樣經過簡單的計算可以發現 $x_1 = 1.4$，接著再一直重複一樣的動作就得到了一個無窮數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

x_n	1	1.4	1.41	1.414	1.4142
x_n^2	1	1.96	1.9881	1.999396	1.9996164

值得注意的是，這個數列是遞增而且有上界的，而且我們想讓這個數列和 $\sqrt{2}$ 這個線段長要多靠近就可以有多靠近，也就是說 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$。所以雖然 $\sqrt{2}$ 不是有理數，卻可以由有理數數列取極限而得到! 事實上，我們在邏輯上就是用這種方法建構實數，把所有收斂的有理數列極限值蒐集起來就形成了實數系，而且我們可以證明任何遞增而且有上界的實數數列都會收斂到某個實數，這個性質就是所謂的完備性，也是實數和有理數最大的不同點。

很多人可能會想說實數明明就有很好的幾何直觀，為什麼還要這麼麻煩用極限的概念去建構實數? 基本上，數系最大的優點就是有運算行為，但在幾何的世界裡我們就很難想像什麼叫把兩個線段長度相除。所以如果我們能充分地了解極限的運算行為，那麼我們就可以安心地將有理數系上面的運算拓展到實數系上，並進一步利用這些運算去研究實數的性質或發展相關的理論工具。

***Exercise* 13.** 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮實數數列，且滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{for } n \geq 1 \end{cases}$，試證明 a_n 收斂。

五、參考資料

1. 微積分史話。曹亮吉教授
2. Achilles 的腳跟。曹亮吉教授
3. 人怎樣求得面積? 黃武雄教授
4. 從畢氏學派到歐氏幾何的誕生。蔡聰明教授
5. 點有多大。蔡聰明教授