棣美弗定理

數學所碩二黃名鉞

一、複數平面

從國小到國中，我們所熟悉的數都是實數。從幾何的角度來看，正實數的存在是為了要滿足古代測量的需要，因為我們想要知道兩點之間的距離。而 0 和負數則可以用來標示位置，並進而產生了數線上的坐標系統，也就是說每個實數都對應到數線上的一個點。但在測量或標示位置的過程中，我們也發展出一些運算，譬如說兩個正數的加法就是將數線上兩個線段連接在一起之後的長度，而乘法則是連續加法。當然我們的實數還有這些運算必須要滿足某些規則，而且這些規則在我們引進未知數的概念時是非常重要的，因為我們並不知道那些未知數到底是什麼數，只知道這些數必須要遵守這些規則，解方程式也是利用這些規則得出我們想要的未知數。

值得注意的是，並不是所有的方程式都可以有實數解，譬如我們找不到任何一個實數滿足 $x^2 = -1$ ，因為乘法規則告訴我們任何實數的平方都是非負的。但是後來的數學家推廣了以往的數系與運算規則，將這些「非實數」納入考慮並建立了比實數系更大的複數系。在棣美弗、歐拉以及高斯這些名數學家的努力之下，發現了複數有著很多跟實數相似的地方，也有很多跟實數截然不同的有趣性質，甚至可以用來解決很多古代未解的難題，於是人們也慢慢地接受這個有點難以想像的數系。

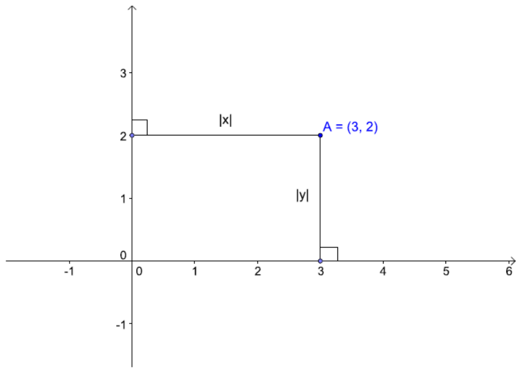
十八世紀時，Wessel 提出了複數平面的概念，也就是說形如 $x + yi$ 的複數可以看成是坐標平面上的點 (x, y)，其中 x, y 都是實數，而絕對值的概念推廣到複數平面上就是度量直線距離。十八世紀末，高斯更是大力提倡這樣的想法，使得複數的研究有了高速的發展。這種想法最大的好處就是將代數 (方程式) 與幾何 (圖形) 連接在一起，就像我們以前將一個二元一次方程式看成坐標平面上的一條直線一樣。而且當我們把以前熟悉的運算推廣到複數系當中時，也可以將實數線上的幾何概念應用到複數平面上。譬如說複數的絕對值一樣被解釋為跟原點的距離，而加法與減法則可以看成複數點的平移。至於本文的重點則會放在觀察複數乘法以及除法的幾何意義。

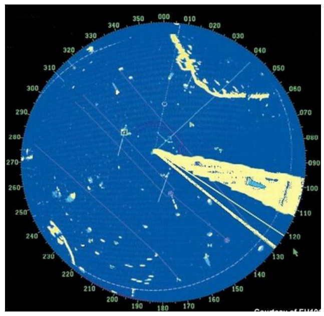
***Exercise* 1.** 請問所有滿足方程式 $|z| = 1$ 的複數 z 在複數平面上所形成的圖形為何?

***Exercise* 2.** 請問所有滿足方程式 $|z-1| = |z+i|$ 的複數 z 在複數平面上所形成的圖形為何?

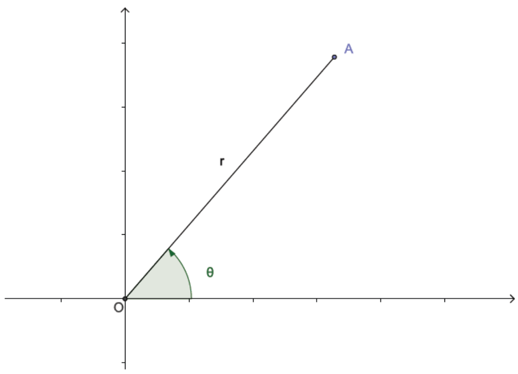
二、複數的極式：直角坐標與極坐標

過去我們所學的平面座標系是一種直角坐標，這種坐標系將位置分割長兩個互相垂直的分量，也就是 x 坐標和 y 坐標。也就是說當我們要決定一個點的位置時，必須要先有兩個互相垂直的有向坐標軸，然後再度量該點和兩座標軸的距離以決定其坐標。但是在很多現實的情況下，用這種方法標定位置是不自然的。譬如說現代的船隻都會配備雷達系統，這種系統是利用無線電波的反射來偵測週遭的物體，從發出電波到接收到反射波的時間差可以測量出距離，再加上接受到反射波的方向就可以決定其位置。





從數學的角度來看，如果我們將自己所在的位置定為原點，並用之前學過的廣義角來代表方向，那麼只要雷達測量出一組數據 (距離, 方向)$= (r, \theta)$，我們就可以決定這個物體在平面上的位置，而這種坐標系統就是所謂的極坐標。



***Exercise* 3.** 假設雷達測量的數據是 $(r, \theta) = (2, 30°)$，試在坐標平面上畫出該物體的位置，並且利用直角坐標來表示它。

***Exercise* 4.** 假設有一物體的位置是在 $(-2, 2\sqrt{3})$，請問在原點的雷達所測出的極坐標為何?

從上面的練習可以發現，平面上任一點的極坐標表式法是不唯一的，因為在表示方向的時候可以有無窮多個同界角的選擇。而在實際應用上為了方便，我們通常只取 $[0°, 360°)$ 內的角度來標示方向。但是在解決某些數學問題時，這些同界角反而可以提供一些幫助，這在之後棣美弗定理的應用當中可以看到。

我們現在的目標就是要把極坐標引入複數平面，並討論直角坐標形式跟極坐標形式之間的關係。首先我們注意到的是對任何複數 $x + iy$，其中 x, y 都是實數，若 (r, θ) 是 (x, y) 的一個極坐標表示法，則我們會有

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

以及

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

所以

$$x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}i\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

最後這個式子就被稱為複數 z 的極式，其中 r 又被稱為向徑，θ 則被稱為幅角。同樣地我們會發現幅角並不唯一，當 $\theta \in [0°, 360°)$ 時，我們特別稱 θ 為主幅角 (argument)，並記做 $\theta = \arg z$。

***Exercise* 5.** 試判斷下列敘述何者正確?

(1) $\arg(-1-\sqrt{3}i) = 240°$

(2) $45°$ 是 $1-i$ 的一個幅角

(3) $30°$ 是 $\cos 30° - i\sin 30°$ 的一個幅角

(4) $\arg(\sin 20° - i\cos 20°) = 290°$

複數的極式除了幫助我們將直角坐標表示法跟極坐標表示法連結在一起之外，它還幫助我們發現了複數乘法的幾何意義，也就是接下來的棣美弗定理要告訴我們的事情。

三、棣美弗定理 **(De Moivre's formula)**

以前我們學過複數的四則運算基本上依然服從實數系裡的結合律、交換律、分配律以及負負得正等等運算律，唯一要注意的地方就是 $i^2 = -1$。舉例來說

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1x_2 + x_1y_2 i + x_2y_1 i + y_1y_2 i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

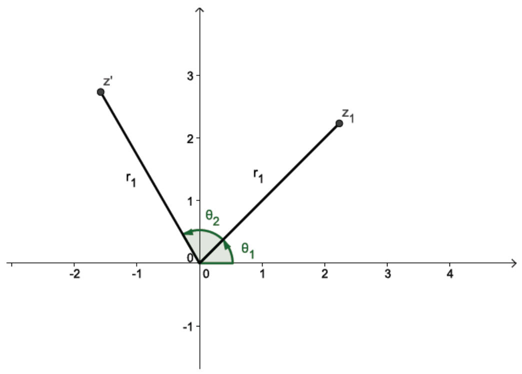
若是我們在做乘法時，將複數表示成極式的話，那麼我們會發現

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ = \ & r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ = \ & r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

如果 $r_2 = 1$，則我們會有

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

且在複數平面上的表現就是



換句話說，把 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 乘上 $\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ 相當於在複數平面上把 z_1 逆時針旋轉 θ_2，所以基本上複數乘法的幾何概念就是旋轉。而除法也有相同的結果

$$
\begin{aligned}
&\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\
=\ &\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\cdot\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}\\
=\ &\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]\\
=\ &\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]
\end{aligned}
$$

最後，棣美弗將這個結果用在連乘積並寫下了著名的棣美弗定理。

Theorem (De Moivre's formula)**.** 對所有的整數 n， $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$。

Proof.
$n=0$ 時顯然成立。對正整數 n，可以使用數學歸納法。當 n 是負整數時，先證明 $n=-1$ 時成立，再讓 $k=-n$ 並引用正整數的情況即可得證。

***Exercise* 6.** 試求 $(1+i)^{100}$。

四、複數的 n 次方根

這裡我們借助棣美弗定理來處理一些解方程式的問題。考慮複數方程式 $z^n=1$，假設 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，則

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$$

由兩邊的絕對值相等可以得到 $|z|^n=1$，但是 $|z|$ 是實數，所以 $|z|=1$。接下來將絕對值約分後會剩下 $\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$，也就是說 $\cos n\theta=\cos 0^\circ$ 且 $\sin n\theta=\sin 0^\circ$。從三角函數的性質我們知道 $n\theta$ 必定是 0° 的同界角。換句話說

$$n\theta=0^\circ+360^\circ k \text{ 其中 } k \text{ 是整數}$$

或者

$$\theta=\frac{360^\circ k}{n} \text{ 其中 } k \text{ 是整數}$$

所以就得出了無窮多個複數根滿足方程式 $z^n=1$。但是當我們把這些根畫在複數平面上的時候會發現，其實只有 n 個相異點，其它的根都以幅角是同界角的形態重複出現，也就是說這個複數方程式恰好有 n 個相異複數根，可以表示為 $\cos\left(\frac{360^\circ k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ k}{n}\right)$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。

***Exercise* 7.** 試解複數方程式 $z^3=i$。

***Exercise* 8.** 試解複數方程式 $z^3+z^2+z+1=0$。