從輪盤到民調：二項分配與信賴區間

數學所碩一黃名鉞

賭博中的機率

在賭城拉斯維加斯裡，美式輪盤可能是最吸引人們的賭博遊戲了。僅僅一個 38 格的閃亮輪盤，外加在輪盤上隨著玩家情緒跳動的白色小球，你完全不需要任何遊戲技巧，就可以享受各式各樣下注方式所帶來的刺激與樂趣。這麼一個古老 (起源於 17 世紀法國) 又簡單的遊戲，當然也引起了許多機率與統計學家的興趣，所以我們就從這裡開始我們的主題。

美式輪盤的下注方式非常多，最簡單的就是以顏色來區分。輪盤上的 38 格分別有 18 格是紅色、18 格是黑色，剩下的兩格則是綠色的 0 和 00。每次下注可以選擇紅色或黑色，若是小球跳到了你所押注的顏色，就可以贏得一倍的賭注；若是小球跳到了不是你所押注的顏色裡 (包括綠色的 0 和 00)，那麼下注的賭金就歸莊家所有。現在讓我們用機率的角度來看看這個簡單的遊戲。首先讓我們假設小球可以跳到任何一個數字上，而且跳到每個數字上的機率都一樣。也就是說，你的每次下注都有 $\frac{18}{38}$ 的機率會贏錢以及 $\frac{20}{38}$ 的機率會輸錢。現在讓我們考慮連續下注 38 次的情況，假設每次下注都是獨立的，那麼我們可以算出 38 次中，恰好贏了 k 次的機率為而 k 的值可以是 0 到 38 中的任何一個整數。這就是所謂的二項分配，因為二項式定理告訴我們

$$\left(\frac{18}{38}+\frac{20}{38}\right)^{38}=\sum_{k=0}^{38}\binom{38}{k}\left(\frac{18}{38}\right)^{k}\left(\frac{20}{38}\right)^{38-k}$$

其中等式右邊的一般項就跟上面的機率分佈是一模一樣的。

有許多人常會對這個分配做出錯誤的解讀。譬如說我們知道每次下注有 $\frac{18}{38}$ 的機率會贏錢，所以「平均」每玩 38 次就會有 18 次是贏錢的 [1]。但這並不代表每玩 38 次就一定會有 18 次是贏錢的。事實上贏 18 次的機率確實是比其他次數的機率要來得高 [2]，但也只有大約 0.1288 左右，也就是說要「恰好」贏 18 次其實是不太容易的。所以比較好的敘述應該是在 38 次下注中，贏 13 到 23 次的機率大約是 0.9275，而贏錢次數不在此範圍的機率則約為 0.0725。換句話說，若是我們依此下注方式到拉斯維加斯玩 100 天的美式輪盤，每天都下注 38 次，那麼大約有 92 天左右的贏錢次數會落在 13 到 23 次之間。這樣的數學敘述比較符合我們的直覺，也就是結果應該不會偏離平均數太遠。

決策理論：假設檢定

以上純粹只是在敘述二項分配的機率性質，若是選擇不同的次數範圍，所得到的機率也會因此而不同。譬如說在 38 次下注中，贏 15 到 20 次的機率大約是 0.6643。但統計學家則利用這樣的性質來幫助我們做一些決策。假設某一天我們一樣連續下注了 38 次，卻發現只贏了 10 次，我們大概會覺得有點怪怪的。若是贏錢次數低於 5 次的話，一般人應該都會覺得這八成是詐賭吧！也就是說，當贏錢次數很低 (或很高) 的時候，我們就不太會相信每次下注贏錢的機率

是 $\frac{18}{38}$。那麼到底要低到多少或高到什麼程度我們才會從「相信」轉變成「不相信」呢？統計學家為此提供了一個數學決策模式。以上述的例子來說，當贏錢次數不在 13 到 23 次之間時，我們就選擇不相信贏錢的機率是 $\frac{18}{38}$，而且這個決策在贏錢機率真的是 $\frac{18}{38}$ 的情況下，會犯錯的機率為 0.0725。眼尖的人們會立刻發現，其實我們不一定要選 13 到 23 次當作我們的接受範圍，選取不同的接受範圍就會有不同的犯錯機率 (在真實機率為 $\frac{18}{38}$ 的情況下)。當然，選取的接受範圍愈寬，犯錯機率就愈小，不過太寬的接受範圍其實是沒有什麼用處的，因為這樣基本上就等同於完全不做決策永遠接受假設值。至於如何選取適當的接受範圍，一般來說是由實際的需求來決定。

點估計與區間估計

另一個統計學家關切的問題是，如果我們打從一開始就不能確定真實的贏錢機率 p 是多少，可不可以用一些方法估出這個值呢？我們當然可以用前述的決策方法：固定一個機率值 (也因此決定了一個機率分佈)，再選擇一個接受範圍，若是賭完的結果落在這個接受範圍裡，就相信一開始估的機率值是真實的。但是這樣的方法似乎很沒有效率，也沒有一個實際的方法告訴我們一開始要怎麼選那個估計值。所以統計學家就想，為何不直接讓數據說話呢？如果我們在 100 次的下注中贏了 40 次，直覺上應該會認為 $\frac{40}{100}$ 是個合理的贏錢機率估計值吧 [3]？但是前面的例子告訴我們，即使贏錢機率真的是 $\frac{40}{100}$，在 100 次中恰好贏 40 次的機率也只有 $\binom{40}{100}\left(\frac{40}{100}\right)^{40}\left(\frac{60}{100}\right)^{60} \approx 0.0812$ 而已，也就是說這個點估計量 $\hat{p} = \frac{40}{100}$ 要命中目標的機率實在是太小了。所以我們想要估計的是 p 的一個範圍，並且希望這個範圍能盡量包含住真實的贏錢機率 (準確) 但是又不要太寬 (精確)，這就是信賴區間的概念。

現在我們的目的是給一個估計區間，以及一個值來告訴我們可以相信這個區間到什麼程度，而最能說服大家的當然就是這個區間會包住真實 p 值的機率了。但是這時會出現一個很嚴重的問題：我們就是不知道真實的機率分佈是什麼，又怎麼能算出一個估計區間包含住真實 p 值的機率呢？另一個技術上的問題是，關於二項分配的計算幾乎都非常複雜，光是一堆組合數跟很高的次方就弄得人們暈頭轉向，那麼有沒有比較簡單的近似方法來算出我們想要的機率呢？

解決第二個問題需要用到比較多的數學工具。我們可以發現二項分配其實看起來跟常態分配有點像，都是鐘型的。事實上，利用一些微積分方法或是直接引用中央極限定理都可以證明，當試驗 (下注) 次數很大時，將二項分配做一些調整後就會跟常態分配非常地接近。數學的說法就是對任意實數 a，恆有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \le a\right) = \mathbb{P}(Z \le a)$$

其中 X 的取值服從下注次數是 n 且每次下注贏錢的機率是 p 的二項分配，而 Z 的取值則服從標準常態分配 (平均值是 0 且標準差是 1)。而我們又知道在常態分配當中，試驗值落在平均值

左右各 2 個標準差的範圍內的機率大約是 95%，所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= \mathbb{P}\left(-2 \leq \sqrt{n}\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq 2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq 2\right) - \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq -2\right) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \leq 2) - \mathbb{P}(Z \leq -2) \\
&= \mathbb{P}(|Z| \leq 2) \\
&\approx 0.95
\end{aligned}
$$

也就是說，$\left(\frac{X}{n} - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \frac{X}{n} + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ 會包含住真實 p 值的機率大約是 95%。

接下來的問題就是，這個區間需要用到我們根本就不知道的 p 值，所以並沒有實用價值。但是因為大數法則保證了當 n 很大時，$\frac{X}{n}$ 會很接近 p，所以我們不妨將式中的 p 也換成 $\frac{X}{n}$，如此便得到了一般人最常用的信賴區間公式

$$
\left(\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)
$$

其中的 $\hat{p} = \frac{X}{n}$ 就是我們一開始用的點估計量，而這個區間會包含住真實 p 值的機率依然大約是 95%，也就是一般所謂的信心水準。舉例來說，如果我們玩美式輪盤並下注 1000 次，發現其中有 513 次是贏錢的，那麼根據上面的公式會得到一個真實贏錢機率 p 的信賴區間為 $(0.4814, 0.5446)$，而且我們有 95% 的信心說這個信賴區間會包含真實 p 值。當然，我們不一定要建立一個信心水準如此高的信賴區間。若是犯錯的代價並不高，那麼我們可以選擇較低的信心水準，以得到一個寬度較小的信賴區間。

在這裡要特別說明的是，我們總是說「這個信賴區間有 95% 的機率會包含真實值」，而不是說「真實值有 95% 的機率落在這個信賴區間裡」。雖然好像沒有什麼不同，但在機率論當中是有差別的，第一句話代表隨機的是信賴區間，也就是說每次進行試驗都會得到不同的信賴區間，而這些信賴區間中大約有 95% 的比例會包含住真實值。第二句話的意思則是把真實值當成隨機量，但這在古典的統計推論裡是不合邏輯的，因為真實值是一個固定的常值，並不會因為我們進行試驗而有所變化。一旦試驗結束並獲得了一個信賴區間後，真實值落在這個區間內的機率不是 0 就是 1。

民意調查

最後，我們將上面的這套想法用在常見的民意調查上。假設某年總統大選前夕，全台灣的 N 位選民當中有 p 的比例支持藍營，以及 $1-p$ 的比例支持綠營。所以當我們均勻隨機地抽出一個人來做調查的話，此人支持藍營的機率就是 p，而支持綠營的機率則是 $1-p$。現在我們要隨機抽出 1000 人來做民意調查，假設抽樣的方法是，每次都從 N 個選民當中均勻隨機地抽出一

人 (也就是說每位選民都可以被重複抽到)[4]，且各次的抽取都是獨立的，那麼當中支持藍營的人數就會服從二項分配 (相當於下注美式輪盤 1000 次，看其中有幾次是贏錢的)。現在我們的目的是想估計 p，假設在這 1000 個被調查的人當中，有 513 個人是支持藍營的，根據我們之前的公式可以算出在 95% 的信心水準之下，p 的信賴區間為 (0.4814,0.5446)。或者更常見的說法是，在 95% 的信心水準之下，藍營的支持度為 0.513，誤差為 ±0.0316，但這其實只是將點估計量 0.513 和信賴區間的寬度 0.0632 分開描述罷了。

信賴區間除了可以避開點估計量很難命中目標的缺點之外，事實上也是在將所謂的估計和決策理論結合起來，並更進一步地描述了用樣本來推論母體時會面臨到的不確定性。上面的例子就是要凸顯出抽樣時隨機性所造成的影響。雖然數據看起來是藍營略勝一籌，但若真實情況是藍營只有 49% 的支持度 (比綠營略低) 似乎也不令人意外，因為我們的信賴區間告訴我們，隨機抽樣所造成的誤差在 3.16% 以內都算是蠻有可能發生的事。但若抽樣的 1000 人當中有 643 人是支持藍營的，我們的信賴區間就變成 (0.6127,0.6733)，也就是說若真實的藍營支持度低於 0.6(沒有被此信賴區間包到)，那麼這個信賴區間出現的機率會低於 5%，所以我們自然就不會相信藍營的支持度比綠營的還低。事實上，那個低於 5% 的機率就是我們否定藍營會輸綠營的強力證據。用比較統計的語言就是說，在 95% 的信心水準之下，藍營的支持度「顯著地」比綠營的高 (甚至是「顯著地」高於 0.6)。而前面那個藍對綠是 513 對 487 的例子，我們就會說藍營的支持度與綠營的支持度「沒有顯著差異」。

附註

1. 在古典機率論中，機率可以被解釋為頻率，也就是說當下注次數愈來愈大時，贏錢次數和下注次數的比例會愈來愈接近贏錢的機率，這也被稱為「大數法則」。

2. 讓我們考慮以下不等式

$$\frac{\binom{38}{k}\left(\frac{18}{38}\right)^{k}\left(\frac{20}{38}\right)^{38-k}}{\binom{38}{k-1}\left(\frac{18}{38}\right)^{k-1}\left(\frac{20}{38}\right)^{38-(k-1)}} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{351}{19} \approx 18.4737$$

   也就是說，當 k 小於或等於 18 時，38 次下注中恰贏 k 次的機率是隨 k 遞增的 (後項與前項的比值大於 1)；而 k 超過 18 後，該機率就變成是隨 k 遞減 (後項與前項的比值小於 1)。所以當 $k = 18$ 時，該機率有最大值。

3. 嚴格的說法是，根據大數法則，當下注次數很大時，贏錢次數和下注次數的比例會很接近贏錢的機率。

4. 現實狀況中的抽樣方法其實不是這樣的，因為我們不會重複調查同一位選民的意見，在此我們只是為了計算上的方便才做這樣的假設 (事實上是為了要滿足每次抽取之間的獨立性)。但是當 N 很大的時候，兩種抽樣方法所做出來的推論其實是非常接近的，相關的理論可以參考任何一本數理統計的教科書。